

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П. А. Машаров
«17» апреля 2025 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Комплексный анализ»** для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
д-р физ.-мат. наук, доцент

В.П. Заставный

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы; дисциплины программы бакалавриата: Алгебра, Аналитическая геометрия, Математический анализ.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Аналитическая теория чисел, Математический анализ, Дифференциальные уравнения, Функциональный анализ, Уравнения математической физики, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.24. Комплексный анализ
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	7 / 252

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	2	4	30	–	30	48	108	экзамен
Очная	3	5	34	–	34	76	144	экзамен
Очная, всего			64	–	64	124	252	

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование математической культуры студента, овладение новым математическим аппаратом, углубление знаний в области алгебры, геометрии и математического анализа, развитие навыков логического мышления и подготовка к профессиональной деятельности, подготовка к чтению специальной литературы.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-1.7. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

4.3. Результаты обучения

ОПК-1.7.1. Знает основные теоремы комплексного анализа.

ОПК-1.7.2. Умеет применять теоретический материал для решения задач комплексного анализа.

ОПК-1.7.3. Умеет вычислять интегралы с помощью теоремы о вычетах.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Комплексная плоскость	1.1. Формы записи комплексных чисел. 1.2. Геометрическая иллюстрация действий над комплексными числами. 1.3. Компактификация комплексной плоскости. 1.4. Геометрическая интерпретация расширенной комплексной плоскости. 1.5. Множества точек на расширенной комплексной плоскости.
Раздел 2. Функции комплексного переменного	2.1. Предел, непрерывность, R-дифференцируемость. 2.2. Моногенность и голоморфность. Условия Коши-Римана. 2.3. Гармонические функции и их связь с голоморфностью. 2.4. Геометрический смысл модуля производной. 2.5. Геометрический смысл аргумента производной. 2.6. Однолистные и конформные отображения. 2.7. Некоторые элементарные функции. 2.8. Многозначные функции.
Раздел 3. Интеграл Коши	3.1. Интегрирование функций комплексного переменного. 3.2. Формула Грина в комплексной форме. 3.3. Аппроксимационная лемма Гурса. 3.4. Интегральная теорема Коши. 3.5. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для голоморфных функций. 3.6. Интеграл типа Коши. Существование производных любого порядка у голоморфных функций. 3.7. Первообразная в комплексной плоскости. Интегральное условие голоморфности.
Раздел 4. Ряды Тейлора	4.1. Общие свойства функциональных последовательностей и рядов. 4.2. Теоремы Вейерштрасса о голоморфности предельной функции и суммы ряда. 4.3. Степенные ряды. 4.4. Разложение голоморфной в круге функции в ряд Тейлора.

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
	4.5. Оценка коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры. 4.6. Нули голоморфных функций. 4.7. Теорема единственности.
Раздел 5. Ряды Лорана. Изолированные особые точки	5.1. Область сходимости ряда Лорана. 5.2. Разложение голоморфной в кольце функции в ряд Лорана. 5.3. Стирание особенностей у голоморфных ограниченных функций. 5.4. Особые точки и их классификация. 5.5. Структура ряда Лорана в окрестности особых точек.
Раздел 6. Вычеты и их применения	6.1. Основная теорема о вычетах. 6.2. Вычисление вычетов. 6.3. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов.
Раздел 7. Отображения элементарными функциями	7.1. Конформные отображения. 7.2. Линейная функция. 7.3. Дробно-линейная функция. 7.4. Степенная функция. 7.5. Показательная функция. 7.6. Функция Жуковского.
Раздел 8. Основные геометрические принципы	8.1. Приращение аргумента вдоль кривой. 8.2. Логарифмический вычет. 8.3. Принцип аргумента. 8.4. Устойчивость числа нулей голоморфной функции. 8.5. Принцип сохранения области. 8.6. Принципы экстремума. 8.7. Оценки голоморфных функций, отображающих единичный круг в себя. 8.8. Описание конформных отображений круга на себя. 8.9. Однолистные функции. 8.10. Основная задача теории конформных отображений.
Раздел 9. Свойства гармонических функций	9.1. Операции над гармоническими функциями. 9.2. Теорема о среднем для гармонических функций. 9.3. Теорема единственности для гармонических функций. 9.4. Принципы экстремума для гармонических функций. 9.5. Теорема Лиувилля для гармонических функций. 9.6. Формула Пуассона для круга.

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 4

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Комплексная плоскость	4		6	8	18
Раздел 2. Функции комплексного переменного	6		4	8	18
Раздел 3. Интеграл Коши	6		4	8	18
Раздел 4. Ряды Тейлора	6		6	8	18
Раздел 5. Ряды Лорана. Изолированные особые точки	4		4	8	18

Раздел 6. Вычеты и их применения	4		6	8	18
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР	30		30	48	108

6.2. Форма обучения – очная, курс – 3, семестр – 5

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 7. Отображения элементарными функциями	12		12	25	49
Раздел 8. Основные геометрические принципы	12		12	25	49
Раздел 9. Свойства гармонических функций	10		10	26	46
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР	34		34	76	144
ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОП	64		64	124	252

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

Определения

Операции над комплексными числами, три формы записи комплексных чисел, геометрическая интерпретация действий над комплексными числами, расширенная комплексная плоскость, окрестность точки, предел последовательности, стереографическая проекция, неограниченная кривая, область, односвязная область, функция комплексного переменного (предел, непрерывность, R-дифференцируемость), частные производные и дифференциал, формальные производные, производная, функция (моногоенная, голоморфная, целая, гармоническая, мероморфная), голоморфность в бесконечности, оператор Лапласа, сопряженные гармонические функции, угол поворота кривой, коэффициент линейного растяжения кривой, однолистные функции, конформность в точке и в области, многозначное выражение (функция), $\operatorname{Arg} z$, корень, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, интегральная сумма, интеграл вдоль кривой, интеграл типа Коши, первообразная, равномерная сходимости внутри области, степенной ряд, радиус сходимости, ряд Тейлора, порядок нуля, ряд Лорана, сходимости ряда Лорана, главная и правильная часть ряда Лорана, особые точки, устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка, порядок полюса, вычеты, логарифмический вычет, число нулей (полюсов) с учетом кратности, приращение аргумента вдоль кривой.

Формулировки и доказательства теорем

Неравенство треугольника, формула Муавра, компактность расширенной комплексной плоскости, теорема Жордана, критерий моногенности, условия Коши-Римана в комплексной форме, связь между голоморфностью и моногенностью в точке и в области, о действительной и мнимой части голоморфной функции, восстановление голоморфной функции по $\operatorname{Re} f$ или $\operatorname{Im} f$, геометрический смысл $\arg f(z)$, сохранение углов между кривыми, геометрический смысл $|f'(z)|$, теорема об однолистных непрерывных отображениях, критерий конформности в области, свойства интеграла по кривой, лемма Гурса, интегральная теорема Коши, интегральная теорема Коши для многосвязной области, интегральная формула Коши, теорема о среднем, свойства интеграла типа Коши, бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, существование первообразной, теорема Мореры, теоремы Вейерштрасса о голоморфности предельной функции и суммы ряда, теорема Коши-Адамара, голоморфность суммы степенного ряда, теорема Тейлора, неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора, теорема Лиувилля, основная теорема

алгебры, эквивалентные определения кратности нуля, теорема единственности, число нулей голоморфной функции, область сходимости ряда Лорана, теорема Лорана, критерий устранимой точки, критерий полюса, связь между порядком полюса и кратностью нуля, вид главной части ряда Лорана в зависимости от типа особой точки, основная теорема о вычетах, сумма всех вычетов, вычисление вычета в полюсе, свойства дробно-линейного отображения (конформность, групповое свойство, круговое свойство, свойство сохранения симметричных точек, построение отображения по трем точкам и их образам, об отображении круговых областей, отображение канонических областей (общий вид)), степенная функция (конформность, условия однолиственности в области, образы луча и дуги окружности), функция Жуковского (конформность, условия однолиственности в области, образы луча и окружности), показательная функция (простейшие свойства, представление в виде предела, конформность, условия однолиственности в области, образы вертикальных отрезков и горизонтальных прямых), тригонометрические и гиперболические функции (неограниченность, условия однолиственности, связь тригонометрических и гиперболических функций, образы вертикальных и горизонтальных прямых для косинуса), вычисление логарифмического вычета, теорема о логарифмическом вычете относительно границы области, принцип аргумента, теорема Руше, принцип сохранения области, принцип максимума (минимума) модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформных отображениях, принцип максимума для гармонических функций, теорема Лиувилля для гармонических функций, формула Пуассона.

7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике и темам:

- алгебраическая форма комплексного числа;
- множества в комплексной плоскости;
- решение уравнений;
- ряды с комплексными членами;
- условия Коши-Риманы;
- криволинейный интеграл;
- разложение в ряд Лорана;
- круг и радиус сходимости степенного ряда;
- изолированные особые точки и их характер;
- вычеты;
- дробно-линейные отображения.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

7.3. Образец содержания экзаменационного билета

1. Критерий моногенности.
2. Интегральная теорема Коши.
3. Представить в алгебраической форме: а) $z = \cos(3 + i)$; б) $z = \operatorname{Ln}(1 + i)$.
4. Найти аналитическую функцию f такую, что $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2y - y^3 + 1$, $f(0) = 1 + i$.
5. Вычислить интеграл $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(z+1)}$.

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

8.1. Семестр 4

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-6	Организационно-учебная работа в аудитории	10
	Самостоятельная работа	10
	Контрольные работы по практике	40
	Контрольная работа по теоретическому материалу	40
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

8.2. Семестр 5

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
7-9	Организационно-учебная работа в аудитории	10
	Самостоятельная работа	10
	Контрольные работы по практике	40
	Контрольная работа по теоретическому материалу	40
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. Бицадзе, А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного: [Учеб.пособие для студентов мех.-мат. и физ. специальностей вузов] / А. В. Бицадзе. - 2-е изд. - М. : Наука, 1972. - 263 с.
2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного: [Учеб.пособие для ун-тов по специальностям "Математика", "Физика", "Механика"] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - 5-е изд. - М. : Наука, 1987. - 688 с.
3. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: [учеб.пособие для вузов] / Л. И. Волковыский и др. - 2 изд. - Москва : Наука, 1970. - 320 с.

10.2. Дополнительная литература

4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: Учеб.для студентов вузов / И. И. Привалов. - 14-е изд. - М. : Высш. шк., 1999. - 432 с.
5. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной: Учеб.для студентов вузов, обучающ. по спец. "Физика" и "Приклад. математика" / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - 5-е изд. - М. : Наука : Физматлит, 1999. - 320 с.
6. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ : [учеб.пособие для мех.-мат. фак. ун-тов] / Б. В. Шабат. - Москва : Наука, 1969. - 576 с.

7. Маркушевич, А. И. Введение в теорию аналитических функций: учеб.пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич. - Москва : Просвещение, 1977. - 320 с.

8. Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций: [Учеб.пособие для вузов] / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк и др. ; Под ред. М. А. Евграфова. - М.: Наука, 1969. - 388 с.

9. Машаров П.А. Комплексный анализ: учебно-методическое пособие / П.А. Машаров. – Донецк, ГОУ ВПО «ДонНУ», 2020. – 134 с.

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.

2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.

3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)

4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).